5-12-16

<u>Άσκ</u> (sos) σίγουρα θέμα!

Βρείτε μια βάση Gröbner για το ιδεώδες $\langle f_1, f_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x,y]$ με $x>y$ deglex, όπου $f_1 = x^3 - 2xy$ και $f_2 = x^2y - 2y^2 + x$

<u>Λύση</u>

$$S(f_1,f_2) = \frac{x^3y}{x^3}(\cancel{x^3} - 2xy) - \frac{x^3y}{x^2y}(\cancel{x^2y} - 2y^2 + x) =$$

$$= \cancel{-2xy^2} + \cancel{2y^2x} - x^2 = -x^2$$ (Δεν διαιρείται), άρα:

Οπότε έχω ως $f_3 = +x^2$ (το πρόσημο δεν μας ενδιαφέρει)

$$S(f_1,f_3) = \frac{x^3}{x^3}(\cancel{x^3} - 2xy) - \frac{x^3}{x^2}(\cancel{x^2}) =$$

$$= -2xy$$ (Δεν διαιρείται)

Έτσι $f_4 = -2xy$

$$S(f_2,f_3) = \frac{x^2y}{x^2y}(\cancel{x^2y} - 2y^2 + x) - \frac{x^2y}{x^2}(\cancel{x^2}) =$$

$$= -2y^2 + x$$ (Δεν διαιρείται)

Οπότε, $f_5 = -2y^2 + x$.

$$S(f_1,f_4) = \frac{x^3y}{x^3}(x^3-2xy) - \frac{x^3y}{-2xy}(-2xy) =$$

$$= -2xy^2 \xrightarrow{f_4} -2xy^2 - \frac{-2xy^2}{-2xy}(-2xy) = 0.$$

$$S(f_2,f_4) = \frac{x^2y}{x^2y}(x^2y-2y^2+x) - \frac{x^2y}{-2xy}(-2xy) =$$

$$= -2y^2+x \xrightarrow{f_5} -2y^2+x - \frac{-2y^2}{-2y^2}(-2y^2+x) = 0$$

$S(f_3,f_4) = 0$ (αφού είναι 2 μονώνυμα).

$S(f_1,f_5) = 0$ από Θεώρημα κατευθείαν.

$$S(f_2,f_5) = \frac{x^2y^2}{x^2y}(x^2y-2y^2+x) - \frac{x^2y^2}{-2y^2}(-2y^2+x) =$$

$$= -2y^3 + xy + \frac{x^3}{2} = \frac{x^3}{2} - 2y^3 + xy \xrightarrow{f_3}$$

$$\to \frac{x^3}{2} - 2y^3 + xy - \frac{x^3}{2x^2}(x^2) = -2y^3 + xy \xrightarrow{f_5}$$

$$\to -2y^3 + xy - \frac{-2y^3}{-2y^2}(-2y^2+x) = xy - xy = 0.$$

$S(f_3,f_5) = 0$ (από θεώρημα), $(\text{ΜΚΔ}(x^2,y^2)=1)$

$$S(f_4,f_5) = \frac{xy^2}{-2xy}(-2xy) - \frac{xy^2}{-2y^2}(-2y^2+x) = \frac{x^2}{2}$$

$\xrightarrow{f_3} 0$. Άρα, η βάση Gröbner του I είναι: $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$.

$Lt(I) = Lt(G) = \langle x^3, x^2y, x^2, xy, y^2 \rangle = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$.

Άρα: Μια άλλη βάση Gröbner:
$G' = \{f_3, f_4, f_5\}$.

Μονωνυμικά Ιδεώδη

Ορισμός: I μονωνυμικό όταν $I = \langle x^{a_1}, \dots, x^{a_s} \rangle$, $a_i \in \mathbb{N}_0^n$

• $F = \lambda_1 x^{m_1} + \lambda_2 x^{m_2} + \dots + \lambda_t x^{m_t}$, Πότε $F \in I$;

Απάντηση

Πρέπει $\lambda_1 x^{m_1} + \dots + \lambda_t x^{m_t} = h_1 x^{a_1} + h_2 x^{a_2} + \dots + h_t x^{a_s}$

Δηλαδή x^{m_i} πολ/σιο κάποιου $x^{a_j} \Rightarrow x^{m_i} \in I$.

Άρα, πρέπει κάθε μονώνυμο $\in I$.

Πρόταση: $f \in I = \langle x^{a_1}, \dots, x^{a_s} \rangle$ ανν κάθε όρος του ανήκει στο I. Ένας όρος ανήκει στο I $\lambda_i x^{m_i}$ ανν το x^{m_i} είναι πολ/σιο κάποιου x^{a_j}. Δηλαδή, $\lambda_i x^{m_i} \in I \Rightarrow \exists j \; (1 \le j \le s)$ ώστε $x^{a_j} \mid x^{m_i}$.

• $F \xrightarrow{G}_{+} h$ ↑ υπόλοιπο
- αν $h = 0 \Rightarrow f \in I$
- αν $h \neq 0 \Rightarrow f \notin I$

Ορισμός: Μια βάση Gröbner $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$ λέγεται ελαχιστική ανν για κάθε $i \in \{1, \dots, t\}$ έχουμε: $lc(g_i) = 1$ και

ii) $\forall$ ζεύγος $i \neq j$ το αρχικό μονώνυμο $lm(g_i)$ δεν διαιρεί το $lm(g_j)$.

Π.χ. Η $\{x^3-2xy, x^2y-2y^2+x, -x^2, -2xy, -2y^2+x\}$ δεν είναι ελαχιστική βάση Gröbner.

Π.χ. Η $\{x^2, xy, y^2-\frac{x}{2}\}$ είναι ελαχιστική βάση Gröbner. Και να κάνω κάποια πράξη π.χ. θα είναι ελαχιστική, δηλ.: $\{x^2-1453xy, xy, y^2-\frac{x}{2}\}$.

ΛΗΜΜΑ

Έστω $G=\{g_1,\dots,g_t\}$ βάση Gröbner για το ιδεώδες I. Αν $lm(g_1) \mid lm(g_t)$, τότε:
$G'=\{g_1,g_2,\dots,g_{t-1}\}$ είναι βάση Gröbner του I.

Απόδειξη

G βάση Gröbner $\Rightarrow Lt(I)=\langle lm(g_1),\dots,lm(g_t)\rangle =$
$=\langle lm(g_1),\dots,lm(g_{t-1})\rangle = Lt(G')$.

Πρόταση: Έστω $G=\{g_1,\dots,g_t\}$ και $F=\{f_1,\dots,f_s\}$ είναι ελαχιστικές βάσεις Gröbner ενός ιδεώδους I. Τότε: $s=t$ και η αρίθμηση των στοιχείων των δύο βάσεων μπορεί να γίνει ώστε $lm(g_1)=lm(f_1)$, $lm(g_2)=lm(f_2), \dots, lm(g_t)=lm(f_s)$
$lm(g_s)$

Απόδειξη

$g_1 \in I$, F βάση Gröbner του $I \xrightarrow{\text{ορισμός}} \exists i$: ώστε
$lm(f_i) \mid lm(g_1)$ ①
$f_i \in I$, G βάση Gröbner του $I \xrightarrow{\text{ορ.}} \exists J$: ώστε
$lm(g_J) \mid lm(f_i)$ ②
$lm(g_J) \mid lm(q_1) \xrightarrow{G \text{ ελαχιστική}} J=1$
Από ①,②: $lm(g_J) \mid lm(g_1)$
Άρα ①: $lm(f_i) \mid lm(g_1)$
②: $lm(g_1) \mid lm(f_i)$ $\Big\} \Rightarrow lm(f_i)=lm(g_1)$

τα αριθμοί ξανά ώστε: $f_i = f_1$. Οπότε
$lm(f_1) = lm(g_1)$.
Επαγωγικά μετά στο t.